

Cuprins

Exerciții și probleme	5
1. Mulțimea numerelor naturale	5
2. Mulțimea numerelor rationale	11
3. Mulțimea numerelor reale	13
4. Mulțimea numerelor complexe	21
5. Raport și proporție	25
6. Calcul algebric	29
7. Funcții	33
8. Ecuații și inecuații	37
9. Unghi	44
10. Triunghi	46
11. Patrulater	57
12. Cerc	70
13. Poliedre	73
14. Corpuri rotunde	78
15. Teste	119
16. Anexe	191

Matematică

Ghid complet

pentru Evaluarea Națională

clasa a VIII-a



Cuprins

Exerciții și probleme	5
1. Mulțimea numerelor naturale.....	5
2. Mulțimea numerelor întregi.....	11
3. Mulțimea numerelor raționale	13
4. Mulțimea numerelor reale.....	21
5. Rapoarte și proporții. Procente. Probabilități	25
6. Calcul algebric.....	29
7. Funcții.....	33
8. Ecuații și sisteme de ecuații liniare. Inecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	37
9. Unghi	44
10. Triunghi	46
11. Patrulater	57
12. Cerc	70
13. Poliedre.....	73
14. Corpuri rotunde.....	85
Teste	91
Răspunsuri.....	191

1. Mulțimea numerelor naturale

- 1.** Calculați:
 - a) $2 \cdot 8 - 10$;
 - b) $17 + 2 \cdot 3 + (17 + 2) \cdot 3$;
 - c) $12 \cdot 5 + 120 - 12 \cdot 15$;
 - d) $(11 + 33 + 66) : 11$;
 - e) $18 + 19 : 19 - 19$;
 - f) $600 : 25 - 38 : 19$.
- 2.** Calculați $a - b + c$ și $a - (b + c)$ în fiecare dintre cazurile următoare:
 - a) $a = 15, b = 3, c = 7$;
 - b) $a = 108, b = 98, c = 10$;
 - c) $a = 2^5, b = 3^3, c = 4^0$;
 - d) $a = 3^3 + 4^3, b = 2^3 + 3^3, c = 5^2 + 5^1$;
- 3.**
 - a) Calculați $xy + 5xz - 4x$, știind că $y + 5z = 7$ și $x = 3$.
 - b) Calculați $2ab + 3bc + 4b^2$, știind că $2a + 3c + 5b = 22$ și $b = 2$.
 - c) Calculați x , știind că $xy + xz = 18$ și $y + z = 3$.
 - d) Calculați $a - b + 3$, știind că $ax - bx + 7 = 21$ și $x = 2$.
 - e) Calculați $x + 23 + y + 5$, știind că $y + x = 173$.
 - f) Calculați $17 + y + 24 + x$, știind că $x + 4 + y = 282$.
- 4.** Ordonăți descrescător numerele a, b, c , știind că $a = 312 - (24 + 67)$, $b = 312 - 24 + 67$, $c = 312 + 24 - 67$.
- 5.** Dacă $a = 15 \cdot 9$ și $b = 27 \cdot 105$, calculați:
 - a) $b : a$;
 - b) $a + b$;
 - c) $(b - a) : a$;
 - d) $(b + a - 22) : 22$;
 - e) $(a + b)(b - a)$.
- 6.**
 - a) Determinați $4x + 20y$, știind că $x + 5y = 14$.
 - b) Determinați $12x - 9y + 8$, știind că $4x - 3y + 4 = 15$.
 - c) Determinați $2x + 3y + 4z$, știind că $x + y + z = 28$ și $x + 2y + 3z = 68$.
 - d) Determinați $6x + 17y + 2z$, știind că $x + 4y = 9$ și $3x + 5y + 2z = 19$.
 - e) Determinați $11x + 15y + 14z$, știind că $x + 5y = 17$ și $4x + 7z = 15$.
 - f) Determinați $x + 6y$, știind că $x + 5y = 49$ și $x + 7y = 67$.
- 7.**
 - a) Produsul a două numere este 208. Mărind unul dintre numere cu 4, produsul devine 272. Determinați cele două numere.
 - b) Produsul a două numere este 3465. Micșorând unul dintre numere cu 22, produsul devine 3135. Determinați cele două numere.
- 8.** Aflați două numere naturale x și y , știind că, dacă îl mărim pe y cu 6, produsul celor două numere se mărește cu 42, iar, dacă îl micșorăm pe x cu 4, produsul celor două numere se micșorează cu 32.

9. Aflați numerele de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 6.

10. Câte numere de forma \overline{ab} , cu ambele cifre impare există?

11. Calculați $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, știind că $a + b + c = 7$.

12. Determinați numerele naturale de forma \overline{ab} , cu proprietatea $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

13. Determinați numărul natural de două cifre, care adunat cu suma cifrelor sale dă 76.

14. Arătați că $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} : 37$, pentru oricare cifre nenule a, b, c .

15. a) Determinați numărul de forma \overline{ab} pentru care $\overline{3ab} + \overline{ab5} = 558$.

b) Determinați numărul de forma \overline{ab} pentru care $\overline{2ab6} + \overline{ab32} = 9958$.

c) Determinați numerele naturale de patru cifre care se micșorează cu 2916 dacă ultima cifră se mută în fața numărului.

16. Calculați:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$;

d) $10 + 20 + 30 + \dots + 2020$;

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 99$;

e) $1 + 4 + 7 + \dots + 301$;

c) $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 96$;

f) $3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 1008$.

17. Se dau numerele naturale:

$a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2019$ și $b = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020$.

a) Comparați numerele a și b .

b) Calculați $b - a$.

c) Arătați că a este pătrat perfect.

d) Arătați că b este divizibil cu 101.

e) Determinați restul împărțirii numărului $a + b$ la 2020.

18. La o împărțire de numere naturale, câtul este 5 și restul este 14. Suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest este 135. Aflați deîmpărțitul și împărțitorul.

19. Prin împărțirea numărului natural n la 8 se obține câtul 7 și restul egal cu 3. Aflați numărul n .

20. Calculați suma numerelor naturale, care, prin împărțire la 7 dau câtul 9.

21. Calculați suma numerelor naturale, care, prin împărțire la 8 dau câtul 6 și restul un număr natural par.

22. Prin împărțirea numărului natural n la 8 se obține restul 5. Aflați restul împărțirii numărului n la 4.

23. Arătați că nu există numere naturale, care, prin împărțire la 6 să dea restul 3, iar prin împărțire la 9 să dea restul 4.

24. a) Fie x și y două numere naturale și $a = 14x + 35y + 47$. Aflați restul împărțirii lui a la 7.

b) Aflați restul împărțirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 + 2019$ la 2020.

25. Determinați numerele naturale \overline{xyz} , care, prin împărțire la \overline{yz} dau câtul 4 și restul $4x$.

26. Comparați următoarele numere:

- a) 2^{521} și 2^{723} ; f) 2^{30} și 3^{20} ;
b) 3^{49} și 9^{25} ; g) 5^{27} și 2^{63} ;
c) 4^{35} și 8^{20} ; h) 3^{210} și 5^{140} ;
d) 5^{200} și 125^{60} ; i) 10^{70} și 5^{100} ;
e) 125^{15} și 25^{20} ; j) 200^{30} și $8^{10} \cdot 10^{60}$.

27. Calculați:

- a) $2^2 + 3^2 + 4^2$; e) $3^{71} : 3^{69}$; i) $25^{10} \cdot 5^{30} : 125^{16} : (5^3)^0$;
b) $5^3 - 5^2$; f) $2^3 \cdot 2^5$; j) $3^{44} \cdot 9^{25} : 27^{30}$;
c) $11^3 - 3^6 + 7^0 + 0^7$; g) $(3^{10})^2 : (3^2)^9$; k) $4^{50} : 8^{30} : 16^2$;
d) $(3 + 2)^2 + (7 - 3)^3$; h) $3^4 \cdot 3^6 \cdot 3^5 : (3^3)^4$; l) $(3^3)^{15} : (27^2)^3 : 81^6$.

28. Efectuați, utilizând factorul comun:

- a) $2^{57} + 2^{58} + 2^{59}$; c) $11^{14} - 3 \cdot 11^{13} - 11^{12} \cdot 2$;
b) $6 \cdot 5^{42} + 3 \cdot 5^{43} + 2 \cdot 5^{44}$; d) $8^{100} - 3 \cdot 8^{98} - 8^{97} \cdot 7$.

29. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

- a) $8^n + 8^{n+1} = 72$; e) $7^{2n+1} + 7^{2n+3} = 350 \cdot 7^{100}$;
b) $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{10}$; f) $5^{2n-1} + 5^{2n} = 750$;
c) $3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{16} = 3^{5n}$; g) $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{10} = 2^n$;
d) $(8 \cdot 4)^{10} : 4^5 : 2^3 = 2^n$; h) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^6 \cdot \dots \cdot 3^{50} = 9^n$.

30. Calculați:

- a) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$;
b) $(3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{50}) \cdot 2 + 9$;
c) $(4^2 + 4^4 + 4^6 + \dots + 4^{40}) \cdot 15$.

31. Determinați ultima cifră a numerelor:

- a) 2^{101} ;
b) 2019^{2019} ;
c) $1^{2020} + 2^{2019} + 3^{2018} + 4^{2017} + 5^{2016} + 6^{2015} + 7^{2014} + 8^{2013} + 9^{2012}$.

32. Arătați că numărul $n = 8^{2018} + 6^{2019} + 5^{2020}$ este divizibil cu 5.

33. Determinați numerele de forma \overline{ab} pentru care $15 \cdot \overline{ab}$ este pătrat perfect.

34. Arătați că numărul $n = \overline{ab} + \overline{ba} - \overline{aa} - \overline{bb} + 64$ este atât pătrat perfect cât și cub perfect.

35. Fie n un număr natural nenul și $x = 10^n + 3$. Arătați că x nu este pătrat perfect.

36. Arătați că numărul $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 15 + 7$ nu este pătrat perfect.

- 37.** Arătați că numărul $x = 7^{2n} + 2 \cdot 7^{2n+1} + 7^{2n+2}$ este pătratul unui număr natural pentru orice număr natural n .
- 38.** Arătați că numărul $x = (2 \cdot 5^{92} + 2 \cdot 5^{91} + 4 \cdot 5^{90}) \cdot 125^4$ este cub perfect.
- 39.** Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 239, 448, 1230\}$. Determinați mulțimile: $A \cap D_2, A \cap D_{12}, A \cap D_5, A - D_{10}, A \cap M_3, A \cap M_2, A \cap M_{10}$ (mulțimea D_n reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului n , iar mulțimea M_n reprezintă mulțimea multiplilor naturali ai numărului n).
- 40.** Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 23 \leq x \leq 51\}$, $B = \{x \mid x \in A \text{ și } x:3\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x:2\}$, $D = \{x \mid x \in A \text{ și } 9 \mid x\}$, $E = \{x \mid x \in A \text{ și } x:5\}$, $F = \{x \mid x \in A \text{ și } x:10\}$, $G = \{x \mid x \in A \text{ și } x \text{ e număr prim}\}$. Enumerați elementele mulțimilor A, B, C, D, E, F, G .
- 41.** Determinați suma divizorilor naturali ai numărului x în fiecare caz:
 a) $x = 18$; b) $x = 3^4$; c) $x = 5$.
- 42.** Determinați numărul de divizori naturali ai numerelor:
 a) 45; b) 49; c) 125; d) 216.
- 43.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ e divizor al lui } 12\}$.
 a) Determinați elementele mulțimilor A și B .
 b) Determinați elementele mulțimilor $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.
 c) Calculați cardinalul mulțimii A .
- 44.** a) Determinați numerele de forma $\overline{25b}$ divizibile cu 2.
 b) Câte numere de forma $\overline{6a7b}$ divizibile cu 5 există?
 c) Determinați numerele de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 3.
 d) Câte numere de forma \overline{xyx} divizibile cu 2 există? Care este cel mai mare dintre acestea?
- 45.** Se consideră mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{3n4} : 3\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{32n} : 2\}$. Determinați elementele mulțimilor $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$ și cardinalul mulțimii B .
- 46.** a) Determinați numerele naturale a și b , știind că numărul $\overline{a53b}$ e divizibil cu 15.
 b) Determinați numerele naturale a, b și c , știind că numărul $\overline{2abc}$ e divizibil cu 90.
 c) Calculați suma numerelor de forma $\overline{4a7b}$ divizibile cu 45.
- 47.** Arătați că:
 a) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} : 3$, pentru oricare număr natural n .
 b) $7 \cdot 5^{2n+1} + 5^{2n+2} \cdot 12 + 5^{2n+4} : 48$, pentru oricare număr natural n .
 c) $2^{n+3} \cdot 3^{n+1} + 6^n \cdot 5 + 2^{n+2} \cdot 3^n : 11$, pentru oricare număr natural n .

d) $25 \cdot 12^n \cdot 3^{n+2} + 6 \cdot 4^{n+1} \cdot 9^{n+2} + 18^{n+2} \cdot 2^{n+3} : 23$, pentru oricare număr natural n .

e) $2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 1 : 3$, pentru oricare număr natural n .

48. Arătați că:

a) $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{50} : 7$;

b) $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{101} : 12$;

c) $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020} : 31$.

49. Determinați numărul natural n în fiecare caz:

a) $(n + 2) \mid 15$;

d) $(n + 1) \mid (2n + 3)$;

b) $(2n + 3) \mid 20$;

e) $(2n + 5) \mid (4n + 28)$;

c) $30 : (2n + 1)$;

f) $(3n + 1) \mid (7n + 9)$.

50. Determinați numărul natural n , știind că $(n + 7) \mid (2n - 8)$ și $(2n - 8) \mid (n + 7)$.

51. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{2n+5}{n+1} \in \mathbb{N} \right\},$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{6n+10}{2n+1} \in \mathbb{N} \right\}, D = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{7n+14}{3n+2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

52. a) Determinați numerele prime a , b și c , știind că $a + 4b + 6c = 56$.

b) Determinați numerele prime a , b și c cu proprietatea $5a + 3b + 10c = 140$.

53. a) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $5 \mid (7x + 2y)$. Arătați că $5 \mid (x + y)$.

b) Fie x și y numere naturale cu proprietatea că $3 \mid (7x + 4y)$. Arătați că $3 \mid (5x + 2y)$.

54. Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b și verificați relația $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , iar (a, b) reprezintă cel mai mare divizor comun:

a) $a = 78$, $b = 60$;

c) $a = 112$, $b = 252$;

b) $a = 450$, $b = 1300$;

d) $a = 45$, $b = 98$.

55. Determinați numerele naturale a și b , știind că:

a) $(a, b) = 3$ și $a + b = 18$;

d) $(a, b) = 12$ și $[a, b] = 216$;

b) $(a, b) = 5$ și $a \cdot b = 750$;

e) $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 13824$;

c) $(a, b) = 7$ și $2a + 3b = 168$;

f) $a \cdot b = 3648$ și $[a, b] = 912$.

56. a) Arătați că numerele $n + 2$ și $7n + 15$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .

b) Arătați că numerele $4n + 9$ și $3n + 7$ sunt prime între ele, pentru oricare număr natural n .

72. Fiecare dintre cei 583 de elevi ai unei școli vorbește fluent cel puțin una dintre limbile engleză sau franceză. Dintre aceștia, 415 vorbesc fluent limba engleză și 270 vorbesc fluent limba franceză.

- Câți elevi vorbesc fluent ambele limbi?
- Câți elevi vorbesc fluent numai limba franceză?

73. 18 elevi ai unei clase participă la cercul de lectură, iar 19 participă la cercul de informatică. Știind că în clasă sunt 30 de elevi și fiecare dintre ei participă la cel puțin una dintre aceste activități, aflați câți elevi participă atât la cercul de lectură cât și la cercul de informatică.

74. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Dintre aceștia, 14 joacă fotbal, 20 joacă handbal, iar 3 nu joacă nici fotbal, nici handbal. Câți elevi din clasă joacă numai fotbal?

75. În vacanța de primăvară, elevii unei clase merg la muzeu sau la grădina zoologică. Se știe că 17 elevi merg numai la muzeu, 15 merg numai la grădina zoologică, iar 5 elevi merg și la muzeu și la grădina zoologică. Aflați câți elevi sunt în acea clasă.

2. Mulțimea numerelor întregi

- Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 0\}$.
 - Scrieți elementele mulțimilor A și B .
 - Calculați suma elementelor mulțimii A .
 - Determinați elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
- Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -8\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$, $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < -2\}$.
 - Determinați cardinalul mulțimilor A , B , C , D , E .
 - Determinați mulțimile $A \cap B$, $C \cup B$, $C \cap D$, $C \cup D$, $D \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus C$, $A \setminus (C \cup D)$, $B \cap (C \cup D)$, $E \cup (D \setminus A)$.
- Calculați suma și produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$.
- Se consideră mulțimea $A = \{-5, -4, -2, 0, 1, 5, 6, 7\}$. Determinați elementele mulțimilor $B = \{x \mid x \in A \text{ și } |x| = x\}$, $C = \{x \mid x \in A \text{ și } |x| = -x\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \in A\}$.
- Calculați:
 - $(-6) + (-8) : 2 + (-10) \cdot (-2)$;
 - $(-54) : (3 - 9) + (-3) \cdot 3$;
 - $(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6) : (-3)$;
 - $4 \cdot (-2 - 8 + 3) - 2 \cdot (-3 + 8 - 2)$;
 - $(-1) \cdot (3 + 9 - 4 + 8) : (-5 + 4 + 2 - 3)$;
 - $1 + (-6 + 8 - 5 - 1) : (-2 + 3 + 4 - 6)$;
 - $(3 - 8 - 2 + 4) : (-1 - 6 + 3 + 5) - 2$;
 - $-9 - (-7 + 3 + 9) : (1 - 8 + 2)$.

6. Calculați:

a) $(-16)^2 : (-2^2)^3 - (-11)^3 \cdot (-11)^4 : 11^5 - 3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 : (-3)^8;$

b) $+24 + (+2^2)^4 : 2^5 - (-5^3) \cdot 5^5 : (-5)^6 - (-15)^2 : (-15);$

c) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 : 3^6 - 9^3 : (-3)^4 - (-4^2)^5 : (-2)^{18};$

d) $[2^{13} \cdot (-4)^6 \cdot (-8)^3]^2 : (4^3)^{10};$

e) $[9^2 \cdot (-3)^7 : 27 \cdot 2]^3 : (-81)^{12};$

f) $[(-2)^{62} \cdot (3^{47})^2 : (2^{60} \cdot 3^{93}) - 4^{20} \cdot 2^{39} - 42^0] \cdot 2 + (-7).$

7. Calculați:

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100;$

b) $2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 2020;$

c) $-1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 2019.$

8. Rezolvați în \mathbb{Z} următoarele ecuații:

a) $|x| = 0;$

e) $|x - 2| + |2x - 4| = 0;$

b) $|2x + 4| = 6;$

f) $|-x| = 7;$

c) $|3x - 9| = -2;$

g) $||2x + 4| - 2| = 2;$

d) $|x + 1| + |x + 2| = 0;$

h) $||3 - x| + 5| = 4;$

9. Determinați numerele întregi x și y cu proprietatea:

a) $|2x - 2| + |y + 8| = 0;$

b) $|x + 5| + |y - 5| = 1.$

10. Determinați mulțimea divizorilor întregi ai următoarelor numere:

a) 20;

b) 48;

c) -24;

d) -56;

e) $-3^3.$

11. Determinați numărul divizorilor întregi ai următoarelor numere:

a) 54;

b) -36;

c) 7;

d) $-2^2.$

12. Determinați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al următoarelor perechi de numere întregi:

a) 24 și -56;

b) -48 și -72;

c) 225 și 81.

13. Determinați elementele mulțimilor: $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{5}{x} \in \mathbb{Z} \right\},$

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{7}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}, C = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } -\frac{10}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{x+3}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}, E = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{2x+4}{x-5} \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$F = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{7x-9}{4x+3} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și } G = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ și } \frac{2x+5}{4x-3} \in \mathbb{Z} \right\}.$$